www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MATHÉMATIQUES

(Option agronomie - Option biochimie-biologie)

PREMIÈRE COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

I. PREMIÈRE PARTIE

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on désigne par $I(X)$ l'ensemble :

$$\{i \in \mathbb{N} \mid P(X = i) > 0\}.$$

Dans toute cette partie, on ne considérera que des variables aléatoires X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $I(X)$ soit fini.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, et soit $p_i = P(X = i)$, $i \in \mathbb{N}$. On définit l'entropie $H(X)$ de X par :

$$H(X) = -\sum_{i \in I(X)} p_i \ln p_i .$$

1. Montrer que pour tout nombre réel $t > 0$, on a : $\ln t \geqslant 1 - \frac{1}{t}$

En déduire que, pour tout couple (a, b) de nombres réels strictement positifs, on a : $a \ln\left(\frac{a}{b}\right) \geqslant a - b$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $I(X) \subset \{1, \ldots, n\}$ et que $I(Y) = \{1, \ldots, n\}$. Pour $i = 1, 2, \ldots n$, on note $p_i = P(X = i)$, $q_i = P(Y = i)$. Montrer que :

$$\sum_{i \in I(X)} p_i \ln \frac{p_i}{q_i} \geqslant 0 ,$$

et qu'il y a égalité si et seulement si $p_i = q_i$ pour $i = 1, 2, \ldots n$.

3. Soit U la variable aléatoire prenant les valeurs $1, 2, \ldots, n$ avec la probabilité $q = \frac{1}{n}$. Calculer $H(U)$.
Montrer que pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $I(X) \subset \{1, \ldots, n\}$, on a $H(X) \leqslant H(U)$, et qu'il y a égalité si et seulement si X a même loi que U.

4. Soient k et $n \in \mathbb{N}^*$, et soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que $I(X) = \{1, \ldots, n\}$ et $I(Y) = \{0, \ldots, k-1\}$. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $p_i = P(X = i)$, $q_i = P(Y = i)$.
On suppose que X et Y sont indépendantes. Soit Z la variable aléatoire : $Z = kX + Y$.

a. Trouver la loi de Z et déterminer $I(Z)$.

b. Montrer que : $H(Z) = H(X) + H(Y)$.

II. DEUXIÈME PARTIE

1. Soit f une fonction continue de R dans $\mathbb{R}_+$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\begin{cases} \Phi_f(x) = f(x) \ln f(x) & \text{si } f(x) > 0 \\ \Phi_f(x) = 0 & \text{si } f(x) = 0 \end{cases}$$

Montrer que Φ_f est continue de R dans R.

On dira que la variable aléatoire réelle X vérifie la propriété (*) si X admet (sauf éventuellement pour $x = 0$) une densité continue f telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_f(x)| \, dx$ converge. On définit alors l'entropie $H(X)$ de X par :

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_f(x) \, dx .$$

2. Soit X_0 une variable aléatoire réelle exponentielle de densité : $\begin{cases} f_0(x) = \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ f_0(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

où λ est un paramètre > 0. Montrer que X_0 vérifie (*) et calculer $H(X_0)$.

Tournez la page S.V.P.

3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, vérifiant (*) et admettant une espérance égale à $1/\lambda$. On désigne par f la densité de X. Montrer que :

$$H(X_0) = -\int_0^{+\infty} f(x) \ln f_0(x)\, dx,$$

et en déduire en utilisant (I.1.) que $H(X) \leqslant H(X_0)$.

4. Soit Y_0 une variable aléatoire gaussienne de densité : $g_0(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$. [forme $e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$]

Montrer que Y_0 vérifie (*) et calculer $H(Y_0)$.

5. Soit Y une variable aléatoire réelle de densité g vérifiant (*). On suppose que Y admet un moment d'ordre 2 égal à σ^2. Montrer que :

$$H(Y_0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \ln g_0(x)\, dx$$

et en déduire que $H(Y) \leqslant H(Y_0)$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail